

## DIMENSION FRACTAL DE LA COSTA DE LA COMUNIDAD AUTONOMA DEL PAIS VASCO

Recibido: 1992-02-16

Luis DOCAMPO  
Begoña G. DE BIKUÑA

ANBIOTEK, S.L. Investigación Científica y Técnica del Medio Ambiente.  
c/ Sabino Arana, 8. Módulo 6. 48013 Bilbao. Bizkaia.

---

### RESUMEN: Dimensión fractal de la Costa de la Comunidad Autónoma del País Vasco.

En este trabajo se determina que el perfil de la interfase de la costa de la Comunidad Autónoma del País Vasco tiene una dimensión fractal  $D = 1.151$ , siendo la costa de Bizkaia ( $D = 1.108$ ) más irregular que la de Gipuzkoa ( $D = 1.04$ ). Al mismo tiempo, se comparan estos valores de  $D$  con el determinado para el curso del río Oria ( $D = 1.096$ ) y con los existentes en la bibliografía para otras líneas geográficas del planeta.

Por otro lado, se establece la similitud existente entre el perfil de la costa de la C.A.P.V. con la trayectoria del movimiento browniano fraccionario de una partícula que se difunde en el seno de un fluido y se discuten las implicaciones geográficas, físicas y ecológicas de la costa de la C.A.P.V. y de la cuenca del río Oria estudiados como objetos fractales.

**Palabras claves:** Dimensión fractal, ecuación de la hipérbola, escala, rugosidad, movimiento browniano, costa de la C.A.P.V.

### ABSTRACT: Fractal dimension of the Coast of the Basque Country Autonomous Community.

In this work, the interface profil of the coast of the Basque Country Autonomous Community has been found to have a fractal dimension of  $D=1,151$ , the Biscayan dimension ( $D=1,108$ ) being greater than the Gipuzkoan one ( $D=1,04$ ). Also, the values have been compared with both those found for the Oria river and those in the bibliography for other geographical lines of the World.

On the other hand, the similitude between the profil of the coastline of the B.C.A.C. and the path of the fractionary brownian movement of a particle spreading across a fluid, is established. Finally, the geographical, physical and ecological implications of the B.C.A.C. coastline and the Oria river basin, taken as fractal objects, is discussed.

**Key words:** Fractal dimension, hyperbola equation, scale, ruggedness, brownian motion, coast of the B.A.C.

### LABURPENA: Dimentsio fraktala dela Euskal Herriko Komunitate Autonomoaren kostaldeko.

Ikerlan honeta, Euskal Herriko Komunitate Autonomoaren kostaldeko barne fasearen dimentsio fraktala  $D=1,151$  dela aurkitu da, Bizkaiko kostaldea ( $D=1,108$ ) Gipuzkoakoa ( $D=1,04$ ) baino irregularragoa delarik. Aldi berean,  $D$  delakoaren lortutako baloreak, bai Oria ibaibidearen baloreekin ( $D=1,096$ ) eta bai bibliografian dauden Munduko beste lerro geografikoaren emaitzekin gonbaratu dira.

Bestalde, zera ezarri egin da: E.H.K.A.aren kostaldeko perfilaren eta jariakin baten baretik doan partikula baten mugimendu browniar zatikiaren traiektoriaren antzekotasuna. Azkenik, E.H.K.A.aren kostaldea eta Oria ibai arroa objektu fraktal bezala harturik, haien inplikazio geografiko, fisiko, eta ekologikoak aztertu dira.

## INTRODUCCION

Este trabajo se ha concebido con el objeto de determinar el "grado de rugosidad" o irregularidad de la costa de la Comunidad Autónoma del País Vasco (C.A.P.V) y compararlo con los valores obtenidos por RICHARDSON (1961) en otras costas y líneas geográficas de Europa, África y Australia.

En este sentido, la costa de la C.A.P.V no se estudia como una simple línea geográfica unidimensional, sino como un "objeto fractal" en la línea de los trabajos de MANDELBROT (1982, 1988). Una fractal es una forma que adecuadamente ampliada o reducida es similar a cada una de sus partes y al conjunto (invariante por dilatación de escala). En la naturaleza la geometría fractal se manifiesta por doquier como consecuencia de la heterogeneidad de los procesos fisicoquímicos y geológicos del ambiente. Son fractales las líneas de costa, el curso de un río, una red hidrográfica, el perfil de las montañas, el contorno de una isla, un rayo, la superficie de los cultivos biológicos, los aerogeles, etc.

En una cuenca hidrográfica es imposible establecer con rigor absoluto el número total de cauces que la drenan, así como la longitud de todos ellos (longitud total de drenaje). El número de cauces y su longitud dependen de la escala cartográfica seleccionada para realizar el análisis morfométrico de la cuenca (DOCAMPO, et. al., 1991). Si aumentamos la escala cartográfica, lo que equivale a utilizar una lupa con un mayor número de aumentos, se incorporan nuevos segmentos fluviales que eran indetectables en una cartografía de menor escala. Podemos aumentar la escala tanto como deseemos hasta utilizar fotografías tomadas por satélites o un microscopio, y seguirán incorporándose nuevos cauces de forma aleatoria, pero siguiendo un patrón de similitud estadística entre áreas parciales o con respecto a toda la red hidrográfica de la cuenca. Estos serían pequeñas depresiones del terreno por las que circula el agua en los períodos de lluvia, dando lugar al caudal de escorrentía. Si bien, en los mapas cartográficos estos pequeños cauces y otros muchos detalles se omiten con el fin de facilitar su lectura, ello no implica que no existan.

De igual forma, la línea de una costa es comparable a la trayectoria de un movimiento browniano fraccionario (MANDELBROT & VAN NESS, 1968), donde los pequeños desplazamientos ("segmentos") que la constituyen son en cierta medida mutuamente independientes e isotrópos, y originan irregularidad en el contorno de una península o bahía. Al aumentar la escala aparecen nuevas sub-bahías y sub-penínsulas, incrementándose con ello la longitud de la costa. En definitiva, la longitud de una fractal, como es el caso del perfil de las costas, aumenta al incrementarse la escala, o mejor dicho, al aumentar la calidad y precisión del instrumento utilizado en su medición.

Debido a la citada propiedad de los fractales (variación de su tamaño en función de la escala o precisión del instrumento de medida), los matemáticos han ideado un número al que denominan "dimensión fractal" para cuantificar de qué manera llena el espacio una fractal. En la geometría Euclídea, el punto tiene dimensión 0. Una línea llena de forma exacta y precisa un espacio unidimensional, se dice que es de dimensión 1. Los círculos son de dimensión 2 y las esferas los son de 3. En contraposición, en la geometría fractal un punto tiene una dimensión que varía entre 0 y 1 (ambos inclusive), una línea como la de la costa, se desparrama en un espacio bidimensional y tiene una dimensión normalmente fraccionaria comprendida entre 1 y 2. Una superficie fractal (p. ej. el perfil de una cuenca fluvial) tiene una dimensión intermedia entre 2 y 3.

La dimensión fractal indica el grado de rugosidad de la costa. Cuanto mayor sea su valor más rugosa es la costa, que en el caso hipotético de obtenerse el valor

máximo de 2, su perfil llenaría por completo el plano. Por el contrario, cuanto más se aproxime el valor de la dimensión fractal a la unidad, más persistente o lineal es el perfil de la costa. Veremos en este trabajo como las costas reales son más regulares de lo que la teoría fractal nos permite imaginar y más irregulares de lo que predice la geometría euclídea.

## MATERIAL Y METODOS

El trazado del perfil epicontinental de la costa de la C.A.P.V se ha realizado a partir de las reproducciones de las imágenes tomadas por el satélite Landsat-5 a su paso por el País Vasco durante los días 28-7-1988 y 6-8-1988. La hora de paso del satélite es a las 9.30 y su órbita está situada a una altura de 705.3 m. Cada imagen registra la información de una superficie de 185 x 180 Km con una inclinación de 98.21°. Estas imágenes han sido publicadas por el GOBIERNO VASCO (1988) en cuatro hojas a escala 1: 100.000. Una de ellas corresponde a la mayor parte de la provincia de Bizkaia (hoja Bilbao-Bilbo) y en ella se recoge el perfil de la costa desde Covarón hasta el cabo Montenegro. La hoja correspondiente a la provincia de Gipuzkoa (hoja Donostia-San Sebastián) recoge el perfil de la costa desde la playa de Oguella hasta Hondarribia (fig. 1).

Se han elegido estas imágenes debido a que registran un mayor grado de rugosidad (un detalle más puntillista apreciable con una lupa estereoscópica) que los mapas cartográficos elaborados a la misma escala.

La dimensión fractal se determina para toda la costa de la C.A.P.V considerándola como una línea continua desde El Covarón hasta el inicio de la margen francesa de la desembocadura del río Bidasoa. Al mismo tiempo, se determina la dimensión fractal local para la costa en la provincia de Bizkaia y en la de Gipuzkoa. Por otro lado, con el objeto de poder comparar los valores de la dimensión fractal de la costa con una línea geográfica intracontinental se ha seleccionado el curso del río Oria cuyo perfil se ha dibujado a partir de la imagen Landsat-5 del territorio de Gipuzkoa.

Existen varios métodos para la determinación de la dimensión fractal, entre los que destacan el método de RICHARDSON (1961), medida de Hausdorff-Besicovitch (HAUSDORFF, 1919), recubrimiento de PONTRJAGIN & SCHNIRELMAN (1932) y la aplicación de la ley de Hurst (HURST, et. al. 1965) a la trayectoria que describe el perfil de la costa en un diagrama de coordenadas cartesianas, donde cada punto está definido por la latitud y longitud.

Nosotros hemos utilizado el método de Richardson por ser el más sencillo y recoger de una manera práctica la influencia de la escala en la forma de la costa. Este método consiste en rectificar la trayectoria de la costa mediante un compás con abertura dada ( $\eta$ ), comenzando cada paso donde termina el anterior. La longitud de  $\eta$  multiplicada por el número de pasos,  $N(\eta)$ , nos da una longitud aproximada,  $L(\eta)$ . Se repite la operación reduciendo cada vez más la abertura del compás y se encuentra que  $L(\eta)$  tiende a aumentar sin límite conforme  $\eta$  tiende a 0. La relación entre  $L(\eta)$  y  $\eta$  se ajusta a la ecuación de la hipérbola:

$$L(\eta) = q \eta^{-a} \quad (1)$$

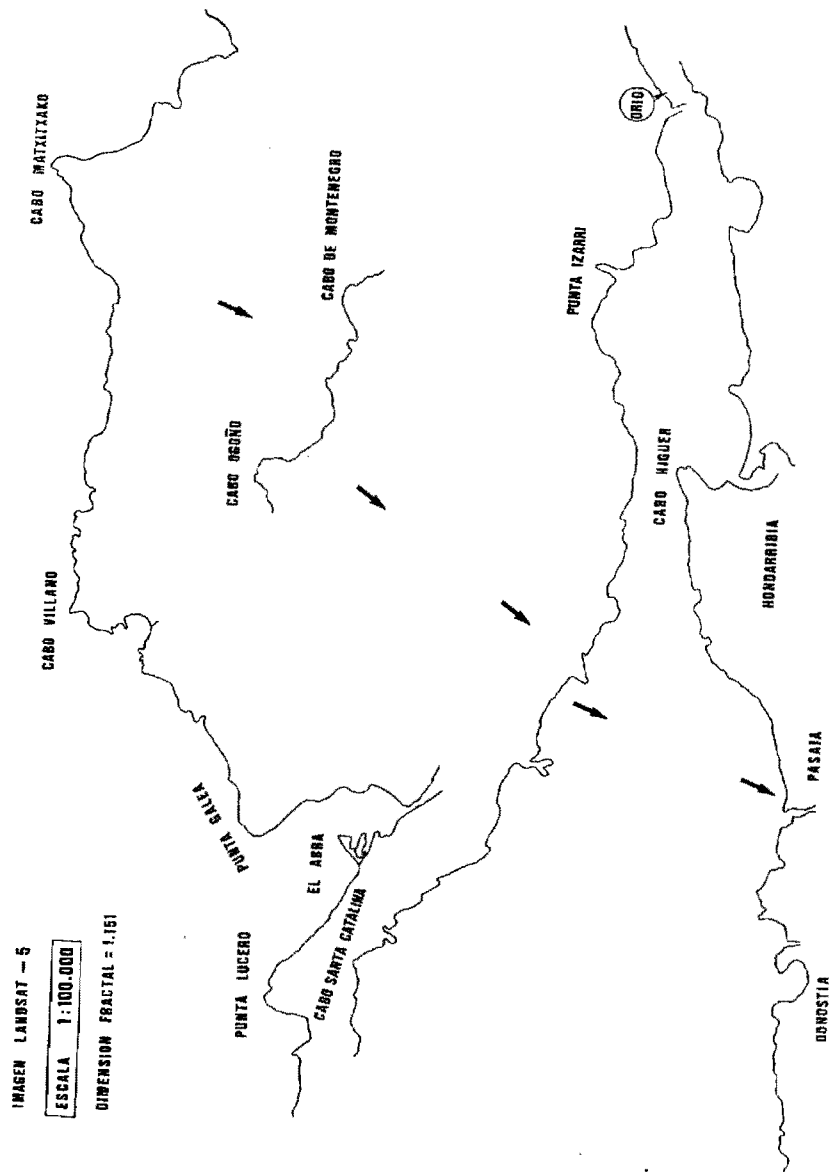


FIGURA 1. Perfil longitudinal de la interfase de la costa de la Comunidad Autónoma del País Vasco.

q es la longitud aproximada de la costa que le corresponde a una longitud de paso o abertura del compás igual a la unidad.  $L(\eta)$  se mide en Km y la abertura mínima de compás utilizada para rectificar la línea de costa ha sido de 1 Km (10 mm). En el caso del río Oria se ha utilizado una longitud mínima del paso  $\eta = 0.5$  Km (5 mm). El exponente  $\alpha$  sirve para calcular la dimensión fractal (D) según MANDELBROT (1967):

$$D = 1 + \alpha \quad (2)$$

Otra estima directa de la dimensión fractal se consigue relacionando mediante la ecuación de la hipérbola, el número de pasos del compás de longitud,  $\eta$ ,  $N(\eta)$ , con dicha longitud del paso ( $\eta$ ):

$$N(\eta) = q \eta^{-D} \quad (3)$$

q tiene el mismo valor que en la ecuación (1) y D es la dimensión fractal, que tiene el mismo valor que el que se obtiene con la ecuación (2).

Las ecuaciones (1) y (3) se ajustan mediante regresión lineal previa transformación logarítmica de las variables. Las distintas rectas de regresión correspondientes a toda la costa de la C.A.P.V, la costa en Bizkaia, la costa en Gipuzkoa y al río Oria, se comparan entre sí mediante el análisis de la covarianza descrito en SNEDECOR & COCHRAN (1980).

## RESULTADOS

El primer resultado que se obtiene al medir la costa de la C.A.P.V desde El Covarón hasta Hondarribia es la varianza de valores en función de la base cartográfica utilizada. Mediante un curvímeter convencional "Kartenmesser" y sobre las imágenes del Landsat-5 a escala 1:100.000 hemos determinado tras varias pasadas una longitud igual a 159 Km. Sobre el mapa de carreteras de la C.A.P.V (escala 1:150.000) (GOBIERNO VASCO, 1989) y utilizando el mismo curvímeter se obtiene una longitud de 152 Km. Por último, la longitud de la costa en el mapa del Instituto Geográfico Nacional a escala 1:200.000 es 156 Km. Se obtienen también diferentes valores de la longitud de la costa utilizando curvímetros o planímetros con distinta precisión métrica.

Existe una alta correlación entre la escala cartográfica y la precisión del instrumento (satélite, fotografía aérea, digitalizador informático, etc.) utilizado en la descripción gráfica del relieve, de tal manera que el fenómeno físico observado (en este caso la dilatación o contracción de la longitud de la costa) es inseparable del observador. De esta forma la longitud de la costa es tan grande o pequeña dependiendo del criterio físico que se desee.

A este respecto, en la fig. 2 se representa el ajuste de la ecuación (1) para cada uno de los elementos geográficos considerados en este trabajo. En esta figura puede apreciarse que a medida que disminuye la longitud del paso de aproximación del compás (lo que equivale a incrementar la precisión del instrumento de medida), la longitud de la costa o del río Oria aumenta. Las curvas de la fig. 1 nos permiten predecir que si dispusiéramos de un instrumento con capacidad para medir o detectar longitudes de 0.5 m, la longitud de la costa de la C.A.P.V sería 485.8 Km y la del río Oria hasta Beasain sería 97 Km (la longitud del río hasta la citada localidad medida con un curvímeter sobre la imagen Landsat-5 es 51 Km), de tal manera que se estaría midiendo el contorno de las piedras y de otros objetos del relieve. Utilizando dichas curvas también podemos determinar que la máxima precisión de nuestro curvímeter sobre la imagen

Landsat-5 es 396 m, un poco mayor que la que se obtiene con la mínima abertura práctica que nos ha permitido el trazado con un compás convencional (~500 m).

Desde el punto de vista matemático en el límite de las curvas de la fig. 2, cuando la longitud del paso de aproximación es igual a 0, todas las costas (o ríos) tienen una longitud infinita (MANDELBROT, 1967). Sin embargo, para un geógrafo carece de interés describir detalles muy finos del relieve y se omiten dichos detalles con el objeto de poder medir y comparar longitudes y áreas de distintos elementos geográficos. No sucede lo mismo para otros especialistas del medio ambiente. Para un ecólogo es importante tener en cuenta el contorno de la cubierta vegetal, de las rocas, cantos rodados, grava y arena del lecho de los ríos o de las costas, en lo que se refiere a la definición de hábitats, relación de la diversidad de las comunidades bióticas con el espacio.... (cada criterio científico "detiene" el objeto fractal en el momento preciso).

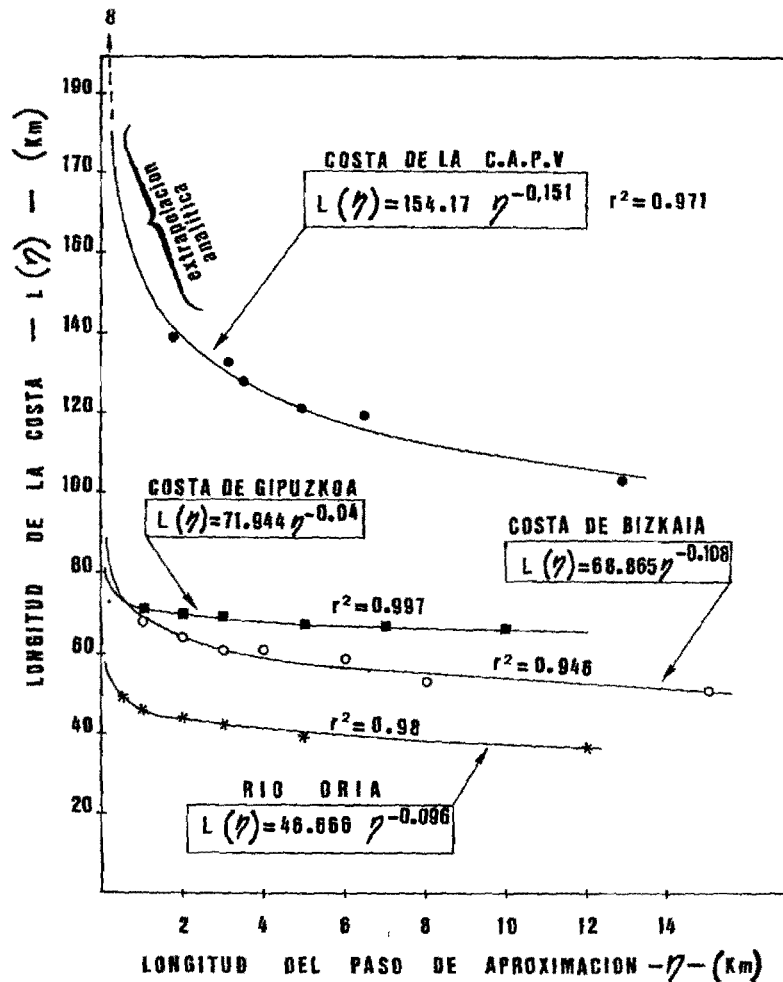


FIGURA 2. Hipérbolas de rectificación de los perfiles de la costa de Bizkaia, Gipuzkoa, Comunidad Autónoma del País Vasco y del río Oria

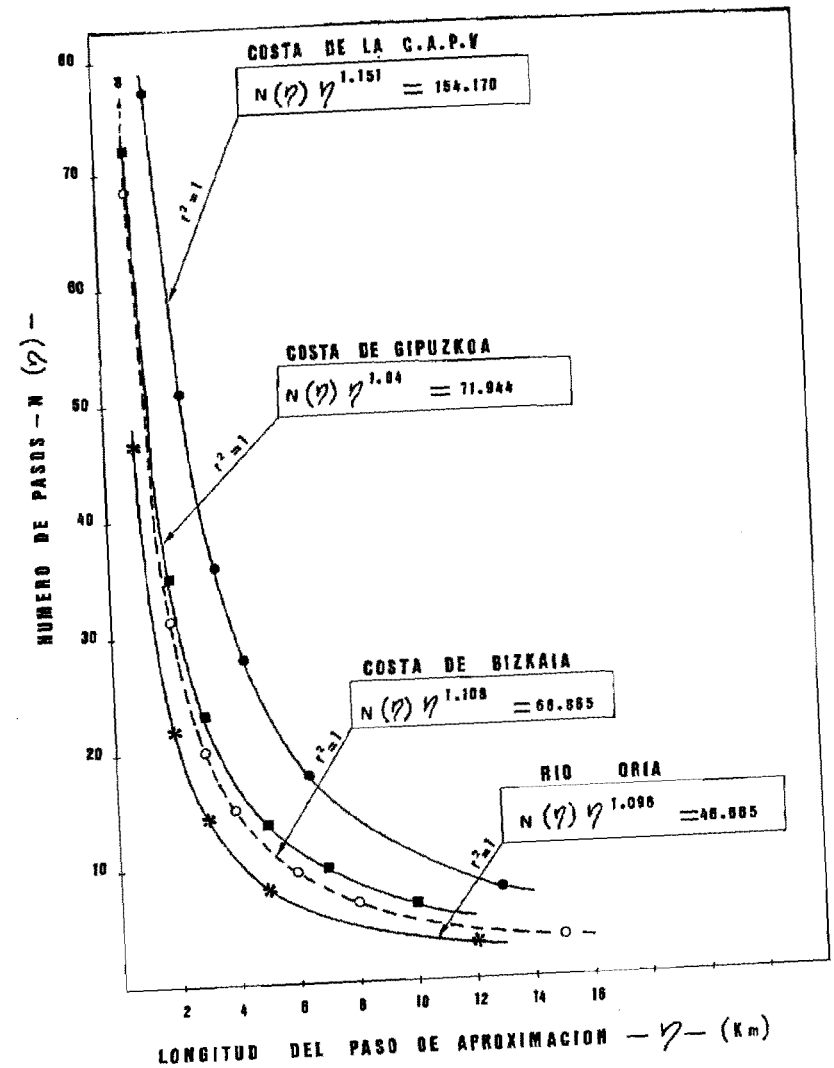


FIGURA 3. Determinación directa de la dimensión fractal: Relación entre el número de pasos o de esferas de radio  $\eta$  necesarias para cubrir la línea de costa o el curso del río, y la longitud de dicho radio.

El análisis de la covarianza determina que todas las curvas de la fig. 2 son muy distintas entre sí. La mayor proximidad se da entre las hipérbolas de Bizkaia y Gipuzkoa y el estadístico F de Fisher-Snedecor = 221.365 [región crítica al 95%,  $F(1,9) = 7.21$ ], curvas heterogéneas. Al mismo tiempo, los valores del exponente  $\alpha$  más próximos corresponden a la costa de Bizkaia y al río Oria, siendo  $F = 1040.85$  [región crítica  $F_{0.025}(1, 9) = 7.21$ ], implica que dichos valores son distintos.

La determinación de la dimensión fractal mediante la ecuación (3) se representa en la fig. 3. Obsérvese que los valores de D de esta figura se corresponden con los que se obtienen mediante la fórmula (2). Teniendo en cuenta la inferencia estadística de  $\alpha$ , el valor promedio de la dimensión fractal de la costa de la C.A.P.V es  $D = 1.151 \pm 0.032$ , en la costa de Bizkaia  $D = 1.108 \pm 0.027$ , en Gipuzkoa  $D = 1.04 \pm 0.003$  y en el río Oria  $D = 1.096 \pm 0.17$ .

A partir de los resultados de RICHARDSON (1961) se deduce que la costa Oeste de Gran Bretaña tiene una  $D = 1.256$ , la costa de Australia  $D = 1.147$ , costa de África del Sur  $D = 1.013$ , frontera terrestre de Alemania  $D = 1.137$  y en la frontera entre Portugal y España  $D = 1.176$ . La irregularidad de la costa de la C.A.P.V es similar a la de Australia y a la de la frontera de Alemania. Al mismo tiempo, la costa de Bizkaia es un 6% más rugosa que la de Gipuzkoa. Los valores de D de las líneas costeras naturales tienden hacia la dimensión fractal del copo de nieve de Von Koch ( $D = 1.261$ ) y frecuentemente están compendidos entre 1.15 y 1.25 (BARNSELY et.al., 1988).

Para dar una idea gráfica del grado de rugosidad de una línea costera, su perfil puede ser comparado con la trayectoria del movimiento browniano de una partícula que se difunde en el seno de un fluido. En la fig. 4A y 4B se representan respectivamente un movimiento browniano fraccionario persistente y otro más complejo. Estos movimientos han sido obtenidos por MANDELBROT (1988) mediante simulación numérica en un ordenador, utilizando un generador de números pseudoaleatorios. En el movimiento de la fig. 4A la partícula se difunde rápidamente debido a que las pequeñas convoluciones son muy débiles y el movimiento es bastante regular o lineal, lo que se traduce en una menor dimensión fractal ( $D = 1.1$ ). Al aumentar la dimensión fractal ( $D = 1.43$ , fig. 4B), la trayectoria forma numerosos bucles pequeños, y se difunden más lentamente debido a que retrocede frecuentemente sobre el camino ya recorrido. Las trayectorias de los movimientos brownianos caracterizados por una  $D > 1.43$  llenan de forma compacta el plano, de tal manera que el movimiento browniano usual (aquél en el que la probabilidad de regresar a un punto del plano ya ocupado es igual a la probabilidad de dirigirse hacia un nuevo punto) es inadecuado como modelo de costa. Las costas y los ríos se simulan en un espacio bidimensional mediante movimientos brownianos fraccionarios con una  $1 < D < 1.261$ .

En este sentido, el movimiento browniano de la fig. 4A sirve como modelo del curso del río Oria (fig. 4C) y es además muy parecido al perfil de la costa de la C.A.P.V (comparando la fig. 1 con la fig. 4A se puede identificar siguiendo la trayectoria de ésta de Oeste a Este, el cabo de Montenegro, punta Izarri y el cabo Higuier). Ello implica que tanto la trayectoria del río Oria como la línea de costa pueden ser reproducidas en el ordenador a "cualquier" escala en función del detalle que se desee.

En un movimiento browniano usual, el recorrido medio libre (media cuadrática) entre el punto inicial y otro punto de la trayectoria aumenta como la raíz cuadrada del número de pasos. Por el contrario, en el movimiento browniano fraccionario que describe el perfil de la costa o de un río, dicho recorrido,  $L(\eta)$ , es directamente proporcional al número de pasos elevado al exponente  $[D-1]/D$ . Esto se demuestra combinando algebraicamente las ecuaciones (1) y (3):

$$L(\eta) = p^{1/D} N(\eta)^{(D-1)/D} \quad (4)$$

En el caso de la costa de la C.A.P.V y del río Oria, la ecuación (4) tiene respectivamente la siguiente forma algebraica:

$$L(\eta) = 79.608 N(\eta)^{0.1310} \quad (5)$$

$$L(\eta) = 33.327 N(\eta)^{0.0875} \quad (6)$$

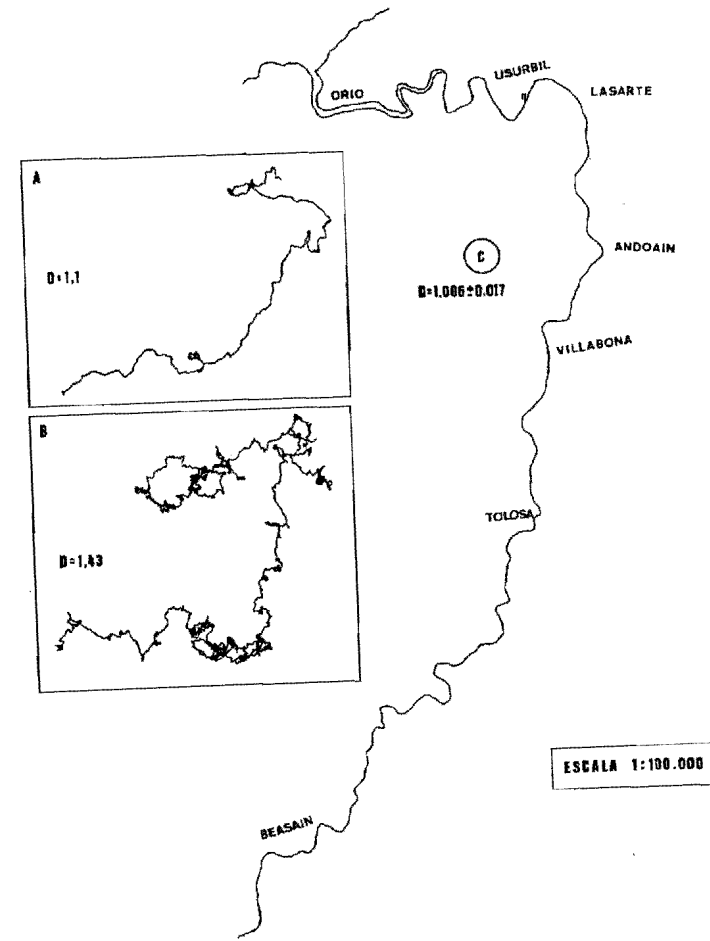


FIGURA 4. A, Trayectoria del movimiento browniano persistente de una partícula que se difunde en el seno de un fluido (tomado de MANDELBROT, 1988). B, movimiento browniano complejo (tomado de MANDELBROT, 1988). C, trayectoria del río Oria. D es la dimensión fractal.

Ambas ecuaciones son la clave de la dilatación estadística de la forma de la costa y del río por cambio de escala. En este sentido, consideraremos la dimensión fractal de toda la costa de la C.A.P.V,  $D = 1.151 \approx \log_4/\log 3.34$ , se deduce que si incrementamos la escala en 3.34 veces (lo que equivale a disminuir la longitud del paso de aproximación  $\eta$  en la misma cantidad), el número de pasos (segmentos que forman las penínsulas o bahías) se multiplica en promedio por 4. Por ejemplo, consideremos una determinada escala definida por una longitud de paso  $\eta = 2.6$  Km, aplicando la ecuación (3) de la C.A.P.V (fig. 3) se obtiene  $N(\eta) = 51$  segmentos. Al multiplicar la escala por 3.34 se obtiene  $N(\eta) = 205.68$  segmentos, siendo  $(205.68/51) \approx 4$ , de tal manera que a partir de la ecuación (5) se obtiene para este caso una dilatación de la longitud de la costa igual a 26.70 Km, cuyo detalle es el que se reproduce en el ordenador.

## DISCUSION

En este trabajo se ha considerado como costa la interfase entre la tierra y el agua, sin embargo, el relieve tridimensional de la costa debe considerar parte de la zona epicontinental y la plataforma continental. De hecho, las isocostas de profundidad de la plataforma siguen una trayectoria similar al perfil de la interfase, exceptuando las irregularidades debidas a las pequeñas islas. La teoría fractal permite predecir que dicho relieve tridimensional tendría una  $D = 2.151$  (costa de la C.A.P.V) o próximo a este valor.

El valor de la dimensión fractal tiene carácter local, tal y como puede observarse en la fig. 3 para la costa en Bizkaia, Gipuzkoa y C.A.P.V (la suma de los valores de  $D$  de las dos provincias es aproximadamente igual a la  $D$  de toda la C.A.P.V). El valor de  $D$  define una forma característica que puede simularse mediante un movimiento browniano persistente y en consecuencia depende de la aditividad de varios factores, desde el punto de vista físico mutuamente independientes, pero que han actuado y/o actúan desfasados en el tiempo y con distintas intensidades.

A pequeña escala la forma primitiva de la costa es una consecuencia del contacto entre Iberia y el continente europeo, siguiendo el esquema de traslación propuesto por BOILLOT (1984). Las etapas tardihercínica y neotectónica del modelo geodinámico de MARTINEZ TORRES (1989) desarrollado en el contexto del esquema de Boillot originaron con distinta intensidad los sistemas de fracturación (falla de Leiza, falla de Pamplona, Falla de Bilbao y fracturas del Pliocuaternario) que configuraron la forma primitiva de la costa de la C.A.P.V y del resto de la costa de la Cuenca Vasca. A este respecto, MANDELROT (1982) demuestra que una costa irreal de dimensión fractal  $D = 1.5$  es engendrada por una superposición de fallas rectilíneas independientes.

Muchos fenómenos que tienen lugar a nivel local están relacionados con la irregularidad o interrupciones geomorfológicas, es decir, con la dimensión fractal. En este contexto, podrían explicarse fenómenos locales como la "hipótesis de continentalización" de la costa vasca expuesta por IBAÑEZ (1989), que indica una mayor estabilidad estival (térmica y química) debida al escaso dinamismo de las masas de agua en verano y este atenuado hidrodinamismo es una consecuencia del relieve del Golfo de Bizkaia. En un contexto más amplio, las curvas de temperatura del agua del mar son más dependientes durante todo el año del hidrodinamismo en la costa de Galicia (Finisterre) y en la de Bretaña, lo que se corresponde con su mayor irregularidad respecto al resto de la línea cantábrica. Esta dependencia se amortigua o es nula en el Golfo de Bizkaia durante los meses de verano, teniendo lugar el sobrecalentamiento estival de las aguas por un efecto de continentalización (IBAÑEZ, 1989). Resulta congruente la relación establecida por Ibañez entre un escaso hidrodinamismo estival y la persistencia (menor dimensión fractal) del relieve de la costa en el Golfo de Bizkaia (interfase y plataforma continental).

En una cuenca hidrográfica también existe una relación entre la dimensión fractal y diversos aspectos ecológicos de la misma. Tal es el caso de la correlación negativa existente entre la riqueza taxonómica o el coeficiente de elasticidad del relieve y la dimensión fractal (DOCAMPO, et. al., 1991). Una cuenca hidrográfica representada por un paisaje fractal muy abrupto está constituido por ríos torrenteros, habitados por especies muy dependientes de la serie temporal de caudales como *Salmo trutta fario*, en tanto que un paisaje fractal más atenuado (mayor coeficiente de elasticidad del relieve) presenta ríos más maduros o desarrollados con una mayor diversidad de hábitats y en consecuencia con una biotipología más compleja (zona de la trucha, zona del barbo y zona de la anguila y de la platija).

Aunque, desde el punto de vista geográfico carece de interés práctico que la teoría fractal establezca que todas las costas y ríos tienen la misma longitud y que ésta sea igual a infinito, el concepto de dimensión fractal permite desarrollar paisajes locales que recogen aspectos geográficos, geomorfológicos, climáticos y ecológicos "muy finos" y que en la cartografía tradicional son omitidos. Estos paisajes serán muy útiles en los análisis y valoraciones cuantitativas de los impactos ambientales de origen antropogénico o natural.

## BIBLIOGRAFIA

- BARNESLEY, M.F.; DEVANEY, R.L.; MANDELROT, B.B.; PEITGEN, H.O.; SAUPE, D. & VOSS, R.F. (1988). *The science of fractal images*. Springer-Verlag. New York. 312 pp.
- BOILLOT, G. (1984). Some remarks on the continental margins in the Aquitaine and French Pyrenees. *Geol. Mag.*, 121 (5): 407-412.
- DOCAMPO, L.; RICO, E.; SEVILLANO, M.A.; G. de BIKUÑA, B. & RALLO, A. (1991). Morphology and quantitative analysis of fluvial erosion systems in the hydrological network of the Basque Country Autonomous Region. *Jour. Environ. Mag.*, 32: 251-266.
- GOBIERNO VASCO. (1988). Imagen Landsat-5 de la Comunidad Autónoma del País Vasco. Hojas Bilbao-Bilbo y Donostia-San Sebastián. Escala = 1:100.000. Dpto. Urbanismo y Medio Ambiente. Dr. Ordenación del Territorio y Urbanismo. Vitoria-Gasteiz.
- GOBIERNO VASCO. (1989). Mapa de carreteras de la Comunidad Autónoma del País Vasco. Dpto. Transportes y Obras Públicas. Vitoria-Gasteiz.
- HAUSDORFF, F. (1919). Dimension und äusseres mass. *Mathematische Annalen*, 79: 157-179.
- HURST, H.E.; BLACK, R. & SIMAIKA, Y.M. (1965). *Long-Term storage: An experimental study*. Constable. London.
- IBAÑEZ, M. (1989). Implicaciones biogeográficas de la continentalización de la Costa Vasca. *Lurralde*, 12: 71-101.
- MANDELROT, B.B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155: 636-638.
- MANDELROT, B.B. (1982). *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Co. New York.
- MANDELROT, B.B. (1988). *Los objetos fractales*. Tusquets. Barcelona. 213 pp.
- MANDELROT, B.B. & VAN NESS, J.W. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10: 422-437.
- MARTINEZ TORRES, L.M. (1989). *El manto de los mármoles (Pirineo occidental): Geología estructural y evolución geodinámica*. Tesis Doctoral. U.P.V. Facultad de Ciencias. Estratigrafía, Geodinámica y Paleontología. Lejona. 294 pp.

- PONTRJAGIN, L. & SCHNIRELMAN, I. (1932). Sur una propieté metrique de la dimension. *Annals of Mathematics*. 33: 156-162.
- RICHARDSON, L.F. (1961). The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook*, 6: 139-187.
- SNEDECOR, G.W. & COCHRAN, W.G. (1980). *Métodos estadísticos*. Compañía Editorial Continental. México. 703 pp.